DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 57 dell'aprile 1975

Sommario

Fascicolo di 40 pagine più inserto redazionale

Inserti

Informazione: immissione iniziale in una macchina di istruzioni e dati da elaborare. *Retroazione:* un metodo per controllare un sistema attraverso il reinserimento, nel sistema stesso, dei risultati delle sue prestazioni precedenti. *Informazione* e *Retroazione* costituiscono la base del sistema automatico e della macchina-automa e sono l'argomento della quarta parte dell'inserto dedicato alla « Cibernetica ».

In copertina

Upupa *(Upupa epops)*.

Carlo Felice Manara

SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI MATEMATICI

Risolvere un problema significa addestrarsi all'uso del linguaggio matematico non solo nel suo aspetto teorico ma anche nella attuazione pratica delle regole generali e astratte

1. Le pagine che seguono sono dedicate alla esposizione di alcune osservazioni sulla risoluzione dei problemi matematici. Ovviamente ciò che esporremo avrà un carattere soltanto di indicazione: non è possibile infatti dare una "regola" per risolvere ogni problema. Tuttavia riteniamo che non sia inutile meditare un poco sul significato della operazione di risoluzione di un problema: infatti la matematica ha anche l'aspetto di linguaggio, anzi addirittura l'unico linguaggio della scienza (come Galileo espose in una sua celebre pagina): e per apprendere un linguaggio occorre non soltanto conoscerne bene le regole, ma anche e soprattutto esercitarsi ad esprimersi con il linguaggio stesso, cosicché le regole astratte vengano concretamente conosciute nella pratica, e assimilate; ed uno dei modi più efficaci per esercitarsi nel linguaggio matematico è quello di utilizzarlo per risolvere dei problemi.
Di solito ai discenti è noto il significato della parola "problema": si tratta di "trovare" qualche cosa, che non è attualmente noto, in base a certe informazioni che vengono fornite.
Abitualmente la soluzione di un problema viene ottenuta utilizzando certe "formule" che vengono considerate come le "formule risolutive" del problema stesso; per es. se si tratta di dividere 100 in due addendi (positivi) che stanno tra loro come i numeri 3 e 2, si procede abitualmente nel modo seguente: il problema di dividere un numero s in due addendi (chiamiamoli x ed y) che stanno tra loro come due numeri dati a e b è risolto con le seguenti formule risolutive:

$$x = s\frac{a}{(a+b)}; \qquad y = s\frac{b}{(a+b)}$$

Nel nostro caso, ponendo nelle formule $s = 100$, $a = 3$, $b = 2$ si ottiene $x = 60$, $y = 40$.
Osserviamo tuttavia che la risoluzione di un problema con il procedimento che è stato or ora ricordato è soltanto una procedura molto particolare, che risulta valida soltanto in qualche caso. Inoltre se si limitano le considerazioni a una procedura analoga a quella che è stata descritta ci si fa una idea molto limitata del concetto di "risoluzione di un problema". Infatti si potrebbe dire in forma molto generale che « Risolvere un problema significa trovare un procedimento razionale, il quale ci dia più informazioni di quelle che si avevano prima della applicazione del procedimento stesso ».
Con la clausola del "procedimento razionale" si intende escludere che la ricerca delle informazioni sia fatta per esempio tirando ad indovinare (senza un procedimento ragionevole per utilizzare le risposte "azzeccate") o la consultazione di maghi o veggenti, consultazione che esula dalle nostre considerazioni.
Nel caso esaminato poco fa, l'applicazione di certe formule rientra nell'ipotesi del "procedimento razionale" di cui si diceva. Tuttavia occorre osservare che se tale utilizzazione è un procedimento razionale, esso non è l'unico e che si possono dare dei procedimenti razionali che non consistono nella applicazione di determinate formule. In altre parole non è sempre detto che la risoluzione di un problema matematico possa essere data mediante formule già date e codificate.
Ciò può avvenire per varie ragioni: per esempio che il problema considerato non abbia formule risolutive, nel senso abituale che si attribuisce a questo termine. Si supponga per esempio che il problema consista nel ricercare una radice di una equazione algebrica di quinto grado, i cui coefficienti sono dei numeri reali dati. Allora si ha da una parte che noti teoremi dell'analisi assicurano dell'esistenza di almeno una radice reale dell'equazione (si tratta di un'equazione di grado dispari) mentre un altro teorema (detto di Ruffini e Abel) assicura che le radici di un'equazione di grado superiore al quarto non possono essere espresse con formule che contengono soltanto simboli di operazioni razionali e di estrazioni di radice.
Ciò non significa tuttavia che il problema non ammetta soluzione; è infatti sempre possibile dare dei proce-

dimenti programmati i quali assicurano la possibilità di trovare un numero razionale (spesso ma non sempre espresso sotto forma decimale; potrebbe essere dato, per esempio, un procedimento che utilizza le frazioni continue) il quale approssima la radice cercata con un errore minore di un numero assegnato preventivamente.

In altri casi può avvenire, come vedremo, che il problema richieda di indicare uno o più elementi di un insieme sotto condizioni enunciate; oppure che richieda di determinare a quale insieme appartiene un elemento o certi elementi dati. Problemi di questo genere possono essere considerati come di competenza della matematica, anche se essi non contemplano la determinazione e il calcolo di uno o più numeri. Infatti la determinazione di un numero — mediante una formula, quando questa esiste, o mediante un procedimento di approssimazione — può essere considerata come un caso particolare della determinazione di un elemento di un insieme.

2. Abbiamo detto che la utilizzazione di formule costituisce soltanto il procedimento più semplice e banale per risolvere un problema matematico.

Esso infatti è generalmente più complesso: si potrebbero distinguere tre fasi le quali non necessariamente sono separate di fatto; vale la pena di soffermarsi ad analizzarle per rendersi conto del significato del procedimento matematico.

Si potrebbe dire che la prima consiste nel tradurre le informazioni del problema con i simboli della matematica, mentre la seconda consiste nel dedurre dalle informazioni date delle altre informazioni fino ad ottenere, se possibile, le informazioni che permettono di risolvere il problema. Questa seconda fase, o della deduzione, viene spesso realizzata utilizzando le leggi interne dei simboli che sono stati adottati per tradurre il problema. Infine la terza fase consiste nella interpretazione dei risultati ottenuti.

Per fissare le idee pensiamo ad un problema particolare; anche se molto semplice, addirittura elementare, tale problema permetterà di individuare le fasi che abbiamo ricordato. Sia il problema seguente:

« Su una vettura tranviaria prima di una fermata vi sono 48 viaggiatori: alla fermata ne scendono 12 e ne salgono 3. Quanti viaggiatori vi saranno sulla vettura dopo la fermata? ».

Qui la prima fase non consiste soltanto nel simbolizzare con le cifre gli insiemi concreti con cui abbiamo a che fare; tali insiemi sono quelli dei viaggiatori che sono sulla vettura prima della fermata, l'insieme dei viaggiatori che scendono e di quelli che salgono. La prima fase consiste anche nell'individuare le operazioni aritmetiche le quali traducono i fenomeni concreti che avvengono: nel nostro caso l'operazione di sottrazione corrisponde evidentemente alla discesa dei viaggiatori, l'operazione di addizione a quella della salita di altri. Quando la prima fase è finita, si passa alla seconda, la quale viene realizzata utilizzando le leggi proprie dei simboli che abbiamo adottato. Abitualmente si tratta di segni (simboli grafici) con i quali rappresentiamo i numeri mediante adatte convenzioni; in questo caso le operazioni di addizione e sottrazione vengono eseguite con certe "regole" che seguono certe leggi, le quali sono spesso ignorate o dimenticate dai più. Ma è chiaro che non è necessario che i simboli utilizzati siano delle cifre scritte materialmente sulla carta o da un'altra parte, nè è necessario che le regole che si seguono siano quelle dell'aritmetica elementare che ognuno ha imparato e memorizzato in età infantile; si può benissimo pensare al caso in cui si possa disporre di una macchina calcolatrice; in questo caso i numeri che corrispondono ai tre insiemi vengono simbolizzati premendo certi tasti e vengono rappresentati mediante sistemi materiali (ruote dentate o circuiti elettrici) che possono anche non essere visti; le operazioni da eseguire sui numeri vengono simbolizzate premendo altri tasti; le "regole" che si seguono sono date dalla costituzione fisica della macchina: dal modo in cui sono disposte le sue ruote dentate oppure i suoi circuiti.

In questo caso il risultato delle operazioni è un numero e la terza fase è immediata; infatti il numero che si ottiene ha come significato esattamente quello del numero dei viaggiatori che sono rimasti sulla vettura dopo la fermata.

Il problema che abbiamo considerato è talmente elementare che difficilmente si presterebbe ad ulteriori osservazioni. Ritorniamo al problema dal quale abbiamo preso le mosse, cioè al problema di dividere il numero 100 in due addendi, che stiano tra loro come due numeri positivi a e b.

In questo caso è chiaro che gli elementi che stiamo cercando son dei numeri. Indicati tali numeri con x ed y, possiamo quindi scrivere le due equazioni che, come suol dirsi, "traducono" il problema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Tutte le informazioni del problema sono state tradotte mediante simboli matematici e quindi possiamo passare alla seconda fase, la quale si esplica con la risoluzione del sistema di due equazioni lineari nelle due incognite. Tale risoluzione può essere condotta con le regole abituali dell'algebra e permette

a) di calcolare i numeri x ed y che risolvono il sistema di equazioni;

b) di stabilire le condizioni sotto le quali il sistema di equazioni ammette soluzioni;

c) di determinare le condizioni sotto le quali le soluzioni del sistema di equazioni possono anche essere considerate come soluzioni del problema.

Questo terzo punto *c*) può essere considerato di competenza della terza fase, cioè della interpretazione dei risultati ottenuti applicando ai simboli adottati le "regole" proprie dei simboli stessi. È da osservarsi infatti che dal contesto del problema si potrebbe trarre la informazione (non esplicitamente enunciata, perché per esempio considerata come "naturale") che i due addendi che si cercano devono essere addendi nel senso dell'aritmetica elementare, cioè debbono essere rappresentati da numeri non negativi. In questo caso evidentemente le informazioni del problema non sono completamente tradotte dalle equazioni che abbiamo scritto, ma ad esse debbono essere anche aggiunte le disequazioni

$$x \geqq 0; \qquad y \geqq 0.$$

Naturalmente queste ultime relazioni costituiscono delle restrizioni dell'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni e pertanto occorre analizzare i casi in cui esse sono tali da soddisfare a tutte le condizioni del problema, implicite o espresse dal significato o dal contesto. Per queste circostanze la terza fase della risoluzione del problema viene anche talvolta indicata come la fase della interpretazione e discussione delle soluzioni.

3. Le osservazioni che abbiamo fatto alla fine del precedente paragrafo conducono a concludere che la prima fase non è completamente descritta con la espressione, abitualmente impiegata, "mettere in equazione" il problema. Infatti abbiamo visto che le informazioni (esplicite o implicite) del problema possono essere tradotte in relazioni matematiche che sono equazioni oppure disequazioni. Ciò avviene anche in casi di problemi molto elementari come quello che presenteremo subito e che appare abbastanza interessante non soltanto perché le sue informazioni sono tradotte da equazioni e da disequazioni, ma anche perché non richiede come risposta un numero, ma un elemento di un insieme determinato dalle informazioni del problema. Pertanto, pur essendo del tutto elementare, costituisce una generalizzazione rispetto alla concezione abituale del problema matematico, la cui risposta è data da un numero.

« Si considerino tre fratelli: Aldo, Biagio, Carlo. Carlo ha meno di 6 anni. La somma delle età di Carlo e di Biagio dà 12; la somma delle età di Aldo e di Carlo dà 14. Chi è il maggiore dei tre fratelli? ».

Se si indicano con a, b, c, le età dei tre, si hanno le relazioni che traducono le informazioni del problema:

$$\begin{cases} a + c = 14 \\ c + b = 12 \\ c < 6 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, sottraendo membro a membro, si ottiene soltanto

$$a - b = 2,$$

cioè si può soltanto concludere che Aldo è certo maggiore di Biagio; ma la risposta al problema può venire soltanto se si considera l'informazione fornita dalla terza relazione, insieme con le informazioni sottintese, secondo le quali ovviamente le età possono essere rappresentate soltanto da numeri positivi. Pertanto se è valida la terza relazione, tenendo conto della seconda equazione e della condizione sottintesa ora ricordata, si ha che deve essere

$$b > 6$$

e quindi

$$a > 8.$$

Il maggiore dei fratelli è dunque Aldo.
Tuttavia accanto alle osservazioni fatte se ne possono sviluppare altre che possono aiutare il solutore di problemi matematici. Forse le osservazioni più interessanti da questo punto di vista sono quelle che conducono a concludere che non necessariamente le informazioni di un problema debbono essere tradotte con equazioni e disequazioni. Infatti, si può pensare di tradurre le informazioni mediante certe figure, che fanno appello alle esperienze visive ed alla intuizione spaziale.

A questo proposito va osservato che le figure, di cui ci si serve abitualmente nella geometria, dovrebbero essere considerate come dei simboli abbastanza analoghi alle cifre, con le quali vengono rappresentati i numeri, ed ai simboli dell'algebra.

Infatti la geometria opera su idee che sono ottenute astraendo dalle nostre esperienze materiali e non esiste alcun "modello" (figura o altro oggetto) che renda con la completa precisione l'idea astratta espressa dalla geometria e dai suoi concetti. Inoltre le conclusioni alle quali arriva la geometria (i teoremi) sono fondate soltanto sugli assiomi e non sulla evidenza della esperienza concreta o di figure più o meno esatte. Pertanto le figure che si tracciano nel dimostrare un teorema o nel risolvere un problema geometrico sono da interpretarsi come simboli convenzionali, che aiutano la fantasia nel ricercare la strada per la dimostrazione o per la risoluzione, le quali tuttavia sono ottenute con il solo ricorso alla logica. Esistono infatti moltissimi esempi di paralogismi (cioè di ragionamenti che concludono il falso) basati su figure apparentemente esatte o su costruzioni apparentemente "evidenti".

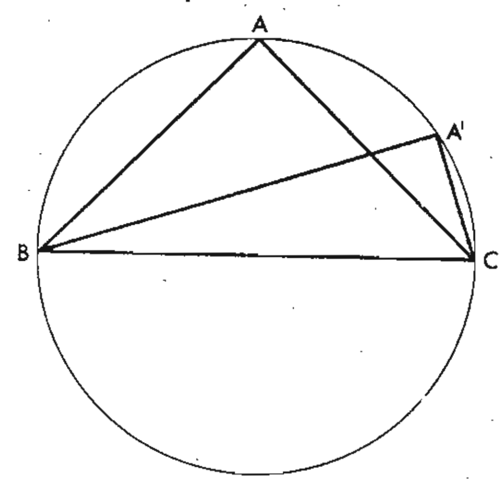
Di conseguenza anche nella risoluzione di un problema con i mezzi della geometria classica si possono distinguere le fasi di cui abbiamo detto; infatti il tracciamento di una o più figure equivale alla scelta di determinati simboli (disegni e figure) per rappresentare gli enti e per tradurre le informazioni del problema. Le deduzioni sono fatte mediante le regole della logica classica, con ragionamenti che hanno la solita forma verbale che si adotta nei ragionamenti usuali. Le regole che si rispettano nella deduzione sono quelle della logica usuale e quelle date dagli assiomi della geometria e sono spesso suggerite dalle figure stesse che si adottano, le quali — come si è detto — servono anche da stimolo alla fantasia ed alla inventiva per indirizzare la deduzione. Infine la fase della interpretazione è spesso (ma non sempre) del tutto elementare, perché il problema richiede quasi sempre di determinare un elemento (o vari elementi) che soddisfino a certe condizioni, partendo da certe informazioni; e la seconda fase della risoluzione conduce spesso direttamente alla costruzione degli elementi cercati.

Ovviamente non si possono dare regole per condurre a termine le varie fasi della risoluzione di un problema; al massimo si possono dare consigli del tutto generici ed indicare criteri di verifica, atti ad aumentare la probabilità che la soluzione sia corretta e quindi a rassicurare il ricercatore sulla validità dei procedimenti seguiti.

Ritorneremo in seguito su questo argomento; vorremmo prima presentare qualche caso di problema matematico che offre occasione per fare qualche commento e per preparare le osservazioni che seguiranno. Da questo punto di vista sono particolarmente interessanti quei problemi che possono essere detti "non di routine", cioè che non ammettono formule risolutive e che debbono essere risolti facendo ricorso a quella concezione più generale della risoluzione di un problema della quale abbiamo parlato.

I. Consideriamo anzitutto il problema seguente:

« Tra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, determinare quello di area massima ».



In questo caso si tratta di un problema la cui risposta consiste nell'indicare un elemento di un insieme.

La trattazione del problema con i metodi dell'algebra non offre difficoltà: a tal fine, indichiamo con a la lunghezza della ipotenusa (data) e con x ed y le lunghezze dei due cateti (incognite finora). La condizione del problema, che traduce il teorema di Pitagora è espressa dalla formula

(1) $a^2 = x^2 + y^2$.

Possiamo ora tener conto del fatto che stiamo trattando un problema in cui le misure dei segmenti (in una unità che si intende data) sono da considerarsi come dei numeri (ovviamente reali) assoluti. Pertanto alla (1) possiamo aggiungere le due disequazioni seguenti:

(2) $x \geqq 0; \qquad y \geqq 0$.

Osserviamo ora che si ha, per una formula fondamentale di algebra

(3) $2xy + (x - y)^2 = a^2$.

Ora si ha che nel primo membro i due addendi sono non negativi, come conseguenza delle (2) e di note proprietà dei numeri reali; inoltre il primo addendo ha come significato geometrico quello del quadruplo dell'area del triangolo rettangolo di cateti x ed y. Pertanto tale addendo sarà massimo quando l'altro avrà il minimo valore possibile. Questa circostanza avviene quando si ha

$x = y$.

La interpretazione di questa relazione conduce a concludere che il triangolo cercato è quello isoscele, cioè il triangolo avente la data ipotenusa ed i cateti uguali tra loro.

Possiamo tuttavia osservare che la strada che abbiamo seguita non è l'unica che porta alla soluzione del problema. Allo stesso scopo si giunge quando si traducano le informazioni del problema in figura e si ricordi un teorema fondamentale della geometria elementare, il quale assicura che tutti i triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa BC hanno il vertice dell'angolo retto che sta su una circonferenza avente BC come diametro.

Ora, ricordando la formula che dà l'area del triangolo, si ha che questa è data dalla metà del prodotto della lunghezza di BC per la distanza di A dalla retta di BC (tale distanza essendo qui presa in valore assoluto). Poiché nel prodotto uno dei fattori è costante, il prodotto sarà massimo quando l'altro fattore avrà preso il valore massimo possibile, cioè quando il vertice A avrà sulla circonferenza la posizione che gli conferisca la massima distanza dalla retta BC. È immediato verificare che questo caso corrisponde al triangolo rettangolo isoscele sulla ipotenusa BC.

II. Il problema seguente richiede di determinare gli insiemi a cui appartengono certi elementi.

« Sono a tavola tre signori, diciamo A, B, C e si viene a discutere del fumo. Parlando di sigarette si scopre che due di essi fumano *Nazionali*, due fumano *Serraglio* e due fumano *Muratti*. A non fuma nè *Serraglio* nè *Nazionali*, e chi non fuma *Muratti* non fuma neanche *Nazionali*. Che sigarette fuma ciascuno dei tre? ».

Indichiamo con N ed S gli insiemi di coloro che fumano *Nazionali* e *Serraglio* e sia M l'insieme di coloro che fumano *Muratti*. Indichiamo con una linea sopra il simbolo di ciascun insieme l'insieme complementare dello stesso.

Ora le informazioni del problema conducono a concludere che ognuno dei tre insiemi è costituito da due elementi e quindi i complementari sono costituiti ciascuno da un elemento.

Si ha anzitutto:

$N = S = \{A\}$

in parole, ciascuno degli insiemi complementari di N e di S è costituito dall'unico elemento A.

Inoltre si ha:

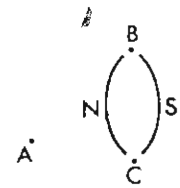
$A \varepsilon M.$

Ma poiché i complementari degli insiemi considerati sono costituiti da un solo elemento ciascuno e quindi dalla relazione scritta, si ottiene

$\{A\} = M.$

In altre parole, dalle informazioni del problema e dalle conseguenze che se ne sono tratte si ha che l'insieme dei non fumatori di *Muratti* è costituito dall'unico elemento A. Pertanto A non fuma nessuna marca di sigarette e gli altri due tizi fumano tutte e tre le marche.

Per tradurre in simboli il problema abbiamo utilizzato quelli usuali della teoria elementare degli insiemi; osserviamo tuttavia che allo stesso scopo si potrebbe giungere anche in altro modo, per esempio seguendo la seguente procedura: rappresentiamo A, B, C con tre punti di un piano e la marca delle sigarette che due soggetti fumano sarà rappresentata da una linea qualunque (anche non un segmento) che unisce i due punti corrispondenti ai soggetti. La regola che sovrintende al tracciamento delle linee è che « una linea congiunge due punti e non più di due ».



Pertanto si ha anzitutto che le linee N (*Nazionali*) ed S (*Serraglio*) non possono passare per A e quindi debbono entrambe congiungere B e C. Consideriamo ora la linea M; se passasse per A, dovrebbe congiungere questo punto o con B o con C. Supponiamo che congiunga A con B: allora sarebbe C quello che "non fuma *Muratti*"; ma il problema dice che costui non deve fumare neppure Nazionali, contro la prima costruzione nella quale abbiamo disegnato la linea N che congiunge B con C. Anologo ragionamento vale se la linea M congiungesse A con C. Pertanto non resta che la ipotesi di tracciare la linea M congiungente B con C; cioè l'ipotesi che porta a concludere che A non fuma e gli altri due fumano tutte e tre le qualità di sigarette nominate.

Come si vede, il procedimento che abbiamo seguito utilizza le regole della logica e le regole ulteriori che abbiamo stabilito per simbolizzare il problema; in questo caso quella secondo la quale una linea congiunge due e due soli punti.

III. Consideriamo il problema seguente, nel quale si richiede di determinare l'appartenenza di certi elementi a certi insiemi. Si tratta di uno tra i più semplici problemi di logica che potrebbero essere classificati scherzosamente come "problemi del viaggiatore e dell'isola remota".

Può essere enunciato nella maniera seguente:

« Un viaggiatore sbarca in un'isola remota, che è abitata da uomini appartenenti a due tribù; diciamole dei "gialli" e dei "verdi". Essi sono indistinguibili per caratteri esterni, ma hanno questa particolarità:

i "gialli" rispondono ad ogni domanda dicendo la verità, i "verdi" rispondono ad ogni domanda dicendo una bugìa. Il viaggiatore sbarca ed incontra tre indigeni, chiamiamoli A, B, C. Egli pone agli indigeni le domande seguenti:

— Ad A: a quale tribù appartieni?

La risposta non viene intesa, perché uno scoppio di tuono soverchia la voce dell'uomo A.

— A B: che cosa ha detto A?

La risposta: A ha detto di essere un "verde".

— A C: a quale tribù appartiene B?

Risposta: B è un "verde".

Si domanda di determinare le tribù alle quali appartengono B e C».

La soluzione del problema viene solitamente data ricorrendo alla logica abituale, che utilizza le parole, le frasi ed i procedimenti del linguaggio comune. Tale soluzione si può raggiungere osservando che, anche se la risposta di A non viene intesa per ragioni accidentali, essa non può essere che la seguente: io sono un 'giallo'.

Infatti se A è un 'giallo' egli risponde la verità; se A è un 'verde' egli risponde mentendo e quindi dà la stessa risposta che se fosse "giallo".

Di conseguenza B dice una bugia riportando la risposta di A nei termini in cui la trasmette; quindi B è un "verde"; infine C dice la verità dicendo che B è un "verde"; quindi C è un "giallo".

Anche se la soluzione si ottiene facilmente con i procedimenti discorsivi abituali, ci interessa qui mostrare come si possa tradurre il problema con i simboli della logica matematica e quindi ricondurre le deduzioni a calcoli eseguiti sui numeri di un determinato campo numerico: quello degli interi "modulo 2".

Per i fini che ci interessano non è necessario conoscere tutto quanto si riferisce alla corrispondenza tra il calcolo delle proposizioni e le operazioni aritmetiche nel campo ricordato; basteranno le poche cose che seguono.

Considerata una proposizione P quale si voglia, ricordiamo che ad essa possono essere attribuiti due "valori di verità": vero o falso. Se facciamo corrispondere al valore di verità "vero" il numero 1 ed al valore di verità "falso" il numero 0 si possono esprimere nell'aritmetica "modulo 2" le leggi logiche fondamentali delle proposizioni. In particolare, indicando con p il valore di verità della proposizione P, si ha che la negazione di P avrà il valore di verità

$$p + 1 \pmod{2}$$

e la "legge della doppia negazione" corrisponde alla legge ben nota dell'aritmetica nel campo degli interi "modulo 2", secondo la quale si ha

$$1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Richiamate queste elementari nozioni, cerchiamo di tradurre in simboli il nostro problema.

Per fare questo, indichiamo con X un indigeno qualsivoglia della terna A, B, C e consideriamo le frasi "X è giallo" oppure "X è verde" ed abbreviamole con i simboli G (X) e V (X) rispettivamente. Siano poi g (X) e rispettivamente v (X) i valori di verità delle frasi sopra considerate.

Si ha ovviamente la legge fondamentale

$$g(\mathrm{X}) + v(\mathrm{X}) \equiv 1 \pmod{2},$$

la quale esprime che un indigeno è giallo oppure verde e che non può appartenere contemporaneamente alle due tribù.

Ovviamente $g(\mathrm{X}) = 0$ significherà che X è verde.

Consideriamo ora una proposizione qualsiasi Y e sia y il suo valore di verità. Indichiamo poi con il simbolo $A(Y)$ il valore di verità che l'indigeno A attribuisce alla frase Y; in modo analogo introduciamo i simboli $B(Y)$ e $C(Y)$. Ora la legge delle risposte degli indigeni può essere riassunta nelle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} &(1) \quad A(Y) \equiv y + g(A) + 1 \\ &(2) \quad B(Y) \equiv y + g(B) + 1 \pmod{2}. \\ &(3) \quad C(Y) \equiv y + g(C) + 1. \end{aligned}$$

Infatti considerando per es. la (1) si ha che se $g(A) = 1$, cioè se A è un giallo, egli attribuisce alla frase qualunque Y il valore di verità che essa ha effettivamente, cioè non dice bugie. Il contrario avviene se A è un verde, cioè se $g(A) = 0$. Analoghe considerazioni si possono fare sulle (2) e (3).

Poniamo ora nella (1) $G(A)$ al posto di Y e quindi $g(A)$ al posto di y. Si ottiene allora

$$A[G(A)] = 1$$

quale che sia il valore di $G(A)$; in parole si ha che A, quale che sia la tribù a cui egli appartiene, attribuisce sempre il valore 1 alla frase $G(A)$, cioè risponde sempre "io sono un giallo".

Consideriamo ora la (2). Sia ora Y la frase "A ha detto di essere verde", che è affermata da B. A questa dunque B attribuisce il valore 1 (perché la afferma), mentre noi sappiamo che effettivamente essa ha valore di verità zero, in base alla prima deduzione fatta. Pertanto nella (2), nel caso in esame, i due membri prendono i seguenti valori

$$(2)' \quad 1 \equiv 0 + g(B) + 1,$$

da cui si trae

$$g(B) = 0$$

ossia si trae che B è un verde.

Sia infine Y la frase "B è un verde", che ha valore di verità 1, come abbiamo dimostrato poco fa e che viene affermata da C; in altre parole C attribuisce a questa frase il valore di verità 1 che ha effettivamente. Pertanto i due membri della (3) assumono in questo caso i valori

(3)' $1 = 1 + g(C) + 1$,

da cui si trae

$g(C) = 1$

ossia la conclusione che C è un "giallo".

IV. Consideriamo il seguente problema che non rientra nella classe dei problemi abituali di routine; anche in questo caso il problema richiede di determinare un elemento di un insieme che soddisfi a certe condizioni. Si tratta del problema seguente:

« Diviso un quadrato in quattro caselle quadrate uguali tra loro, si tratta di inserire nelle quattro caselle i quattro numeri 1, 2, 3, 4 in modo tale che eseguendo i prodotti dei numeri (in coppia) che stanno sulla stessa linea e di quelli che stanno sulla stessa colonna in tutti i modi possibili e poi sommando tali prodotti, il valore della somma sia il massimo possibile.
Ovviamente il numero dei prodotti da considerare è 4. Nel caso illustrato dalla figura si ha che il numero risultante dalla somma è
$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 25$.

1	2
3	4

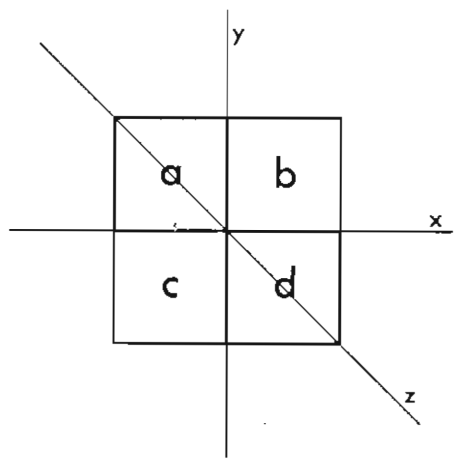
Si domanda se tale numero è il massimo che si può ottenere oppure se si possano disporre i quattro numeri nelle caselle in modo da ottenere una somma maggiore ».

Uno dei procedimenti a cui si potrebbe in primo luogo pensare condurrebbe ad eseguire i calcoli in tutte le possibili scelte ed a confrontare i risultati tra loro. A prima vista questo procedimento potrebbe essere considerato come troppo gravoso e forse poco razionale. Infatti le possibili maniere per disporre nelle quattro caselle i primi quattro interi sono 24. E si presenterebbe il problema di organizzare i calcoli e gli spostamenti in modo da avere la sicurezza di aver proprio esaminato tutti i casi possibili.

Tuttavia si può osservare che i valori dei risultati delle operazioni che si eseguiscono sui numeri incasellati non sono 24 diversi tra loro; un'analisi ulteriore ci porta a concludere che i calcoli indicati portano soltanto a 3 risultati diversi tra loro. Infatti la somma dei prodotti

$S = ab + cd + ac + bd$

non cambia quando il quadrato venga trasformato in sè dai movimenti del gruppo generato dai seguenti movimenti elementari:
1° ribaltamento attorno ad una mediana x;
2° ribaltamento attorno all'altra mediana y;
3° ribaltamento attorno ad una diagonale z.



Questo gruppo di movimenti del quadrato in sè è isomorfo al gruppo delle sostituzioni tra i quattro elementi a, b, c, d generato dalle seguenti operazioni:

1° coppia di scambi $(ab)\ (cd)$
2° coppia di scambi $(ac)\ (bd)$
3° scambio (bc).

Pertanto l'idea di risolvere il problema calcolando effettivamente i possibili valori del numero che si ottiene con le operazioni indicate appare ora più ragionevole. Allo scopo si può giungere anche osservando che il numero S può essere dato da

(°) $S = (a + d)(b + c)$

e pertanto i tre valori distinti di S sono dati da

$(1 + 4)(2 + 3) = 25$; $(1 + 3)(2 + 4) = 24$;
$(1 + 2)(3 + 4) = 21$.

Quindi il valore trovato di 25 è veramente il massimo possibile.

La soluzione del problema potrebbe essere ottenuta anche in altro modo osservando che in questo caso si tratta di ricercare il massimo valore possibile del numero S dato dalla (°) quando i fattori sono legati dalla relazione

(°°) $(a + d) + (b + c) = 10.$

Ora è noto che quando i fattori hanno una somma data, il prodotto è massimo se i fattori sono uguali tra loro; nel nostro caso, dunque, il valore massimo di S si ottiene quando si ha

$a + d = b + c = 5$

il che porta a scegliere per a, b, c, d i valori scelti e al valore 25 di S.

V. Consideriamo infine un problema classico della geometria. Si tratta del problema della iscrizione del decagono regolare nella circonferenza.
Il problema può essere formulato dicendo:

« Si cerca di costruire un triangolo isoscele OAB, nel quale dunque si ha

$OA = OB$

in modo che l'angolo in O sia 1/5 di angolo piatto (e quindi 1/10 di angolo giro) ».

Si ha dunque subito che gli angoli alla base valgono ciascuno 2/5 di piatto.
Sia ora C il punto del lato OB tale che AC sia bisettrice interna dell'angolo in A.
In base a teoremi elementari si ha allora che anche il triangolo ABC è isoscele e che si ha quindi $AB = AC$. Inoltre risulta essere isoscele anche il triangolo OAC; tutto ciò si dimostra in base ad immediati calcoli che riguardano gli angoli.
In particolare sono simili tra loro i due triangoli OAB, ABC e si può quindi scrivere la proporzione

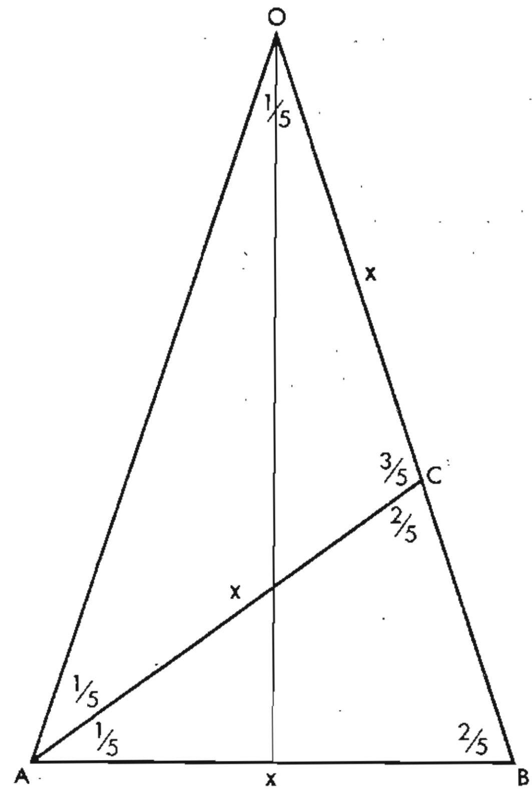
$OA : AB = AB : BC.$

Supponiamo ora nota l'operazione di misura e scegliamo per comodità come unità il lato OA, che risulta essere il raggio della circonferenza che ha centro in O e sulla quale stanno i due punti A e B, vertici del decagono regolare inscritto.
Indicando con x la misura incognita del lato si ha, per il fatto che il triangolo OAC è pure isoscele,

$BC = 1 - x$

e la proporzione precedente può essere tradotta nell'equazione

$$(1) \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}$$



La equazione (1) traduce quindi il nostro problema geometrico con i simboli dell'algebra.

Va osservato tuttavia che la (1) non traduce tutte le informazioni del nostro problema. Infatti abbiamo eseguito la operazione di misura del lato incognito scegliendo come unità il raggio della circonferenza; occorre tuttavia osservare che il segmento che è stato misurato non si intende orientato. Pertanto il numero x che si cerca è da intendersi come un numero assoluto, cioè è da intendersi rappresentato da un numero positivo. Quindi alla (1) occorre anche aggiungere la disequazione

$$(2) \quad x \geqq 0$$

che consegue dalle convenzioni che abbiamo adottate per tradurre il nostro problema geometrico con i simboli dell'algebra.

Ormai il nostro problema è stato tradotto con i simboli dell'algebra e la seconda fase consiste nel trarre le deduzioni dalla espressione ottenuta, deduzioni che nel caso in esame, si riducono alla esecuzione dei calcoli, cioè all'applicazione delle leggi formali che reggono la trasformazione delle espressioni algebriche. Nel nostro caso la (1) viene trasformata facilmente nella equazione

$$(1)' \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Il problema ora viene ricondotto ad un problema noto, che può essere risolto con dei procedimenti di routine, ma che può anche essere affrontata in altri modi. Invero volendo utilizzare dei procedimenti di routine si potrebbe far ricorso alla formula risolutiva della equazione algebrica di 2° grado; in questo caso si hanno due radici reali, l'una delle quali è positiva, mentre l'altra è negativa.

La relazione (2) che, insieme con la (1) traduce il nostro problema con i simboli dell'algebra, dà un criterio per la scelta della radice tra le due che l'algebra ammette per la equazione (1)'. Pertanto la radice cercata è data da

$$(3) \quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Un facile calcolo, o una lettura delle tavole, porta a dare ad x il valore

$$(4) \quad x = 0{,}6180 \ldots$$

con un errore minore di 10^{-4}.

Tuttavia ripetiamo che questo non è l'unico procedimento che porta alla risoluzione del problema posto. Infatti la formula (3) contiene il simbolo "$\sqrt{5}$" che rappresenta sostanzialmente un procedimento infinito, per determinare dei numeri razionali i quali approssimino la soluzione dell'equazione

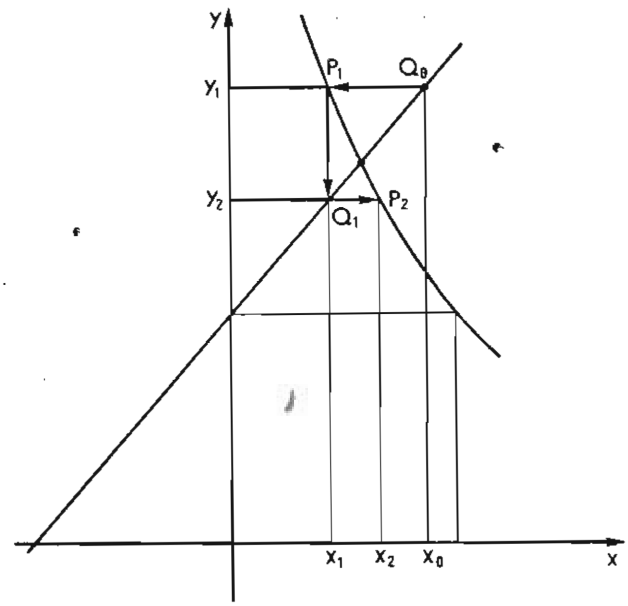
$$(5) \quad y^2 = 5.$$

In altre parole la formula (3) riconduce la soluzione della equazione di 2° grado (2) alla risoluzione della equazione di 2° grado (5); la sola differenza è che le soluzioni della (5) si sanno approssimare con procedimenti abitualmente insegnati, oppure sono tabulate e si trovano quindi con relativa facilità. Ma queste circostanze non cambiano la natura del problema della risoluzione della (5), risoluzione che consiste sostanzialmente nella determinazione di un procedimento infinito di approssimazioni successive.

Possiamo descrivere qui di seguito uno dei procedimenti che si potrebbe seguire. Esso è basato sulla osservazione che l'equazione (2) può essere scritta nella forma seguente

$$(6) \quad x + 1 = \frac{1}{x}.$$

In questa forma l'equazione può essere interpretata geometricamente come quella che conduce alla ricerca



della ascissa di un punto che sia comune alla retta di equazione

$$(7) \quad y = x + 1$$

ed alla iperbole equilatera

$$(8) \quad y = \frac{1}{x}.$$

La ricerca dell'ascissa del punto di intersezione che ha ascissa positiva può essere fatta nel modo seguente: scegliamo anzitutto un'ascissa $x(0)$ di un punto Q_0 che appartiene alla retta rappresentata dalla (7). La ordinata $y(1)$ del punto Q_0 sarà data dalla equazione (7) e perciò vale

$$(9) \quad y(1) = 1 + x(0).$$

Ora esiste un punto P_1 che appartiene alla iperbole rappresentata dalla (8) e che ha l'ordinata data dalla (9); tale punto ha l'ascissa

$$(10) \quad x(1) = \frac{1}{y(1)}.$$

Partendo da questa ascissa si può calcolare l'ordinata di un punto Q_1 che appartiene alla retta di equazione (7); partendo da questa ordinata si ottiene un'ascissa di un punto P_2 che appartiene alla iperbole e così via. Come mostra la figura, si ottiene un procedimento "a ragnatela" che conduce al punto di intersezione tra la retta e la iperbole e che ha come ascissa la radice

positiva della equazione (6), cioè della equazione (2).
A titolo di esempio, assumendo il valore

(11) $x(0) = 1$

si ha la tabella seguente di valori

N.	y	x
1	2	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
4	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{8}$
5	$\frac{13}{8}$	$\frac{8}{13}$
6	$\frac{21}{13}$	$\frac{13}{21}$
7	$\frac{34}{21}$	$\frac{21}{34}$
8	$\frac{55}{34}$	$\frac{34}{55}$
9	$\frac{89}{55}$	$\frac{55}{89}$
10	$\frac{144}{89}$	$\frac{89}{144}$

Si verifica facilmente che i valori di x che occupano posto dispari formano una successione crescente:

$$\frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ \frac{8}{13};\ \frac{21}{34};\ \frac{55}{89}\ \ldots$$

ed i valori di posto pari formano una successione decrescente:

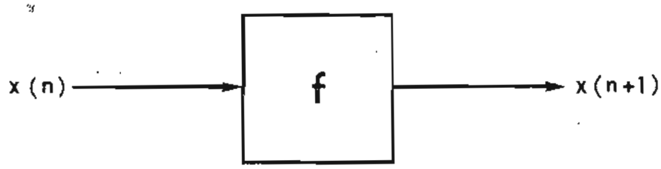
$$\frac{2}{3};\ \frac{5}{8};\ \frac{13}{21};\ \frac{34}{55};\ \frac{89}{144}\ \ldots$$

Inoltre ogni numero della prima successione è minore di ogni numero della seconda.

Pertanto, come si vede ancora una volta dalla figura, i numeri della prima successione sono dei valori approssimati per difetto della radice cercata; quelli della seconda successione sono dei valori approssimati per eccesso della radice suddetta. È possibile quindi verificare facilmente quale sia l'errore che si commette assumendo uno dei numeri della prima successione come valore approssimato della radice.
A titolo di verifica si ha che il 5° numero della prima successione dà

$$\frac{55}{89} = 0{,}6179\ldots$$

che differisce per meno di $2 \cdot 10^{-4}$ dal valore della radice, come mostra il confronto con il valore dato dalla (4).
Come abbiamo detto, si potrebbero dare altri procedimenti per il calcolo di questa radice, procedimenti che possono essere classificati come "procedimenti di iterazione" cioè dei procedimenti che potrebbero essere descritti dicendo che si esegue sempre la stessa operazione (o lo stesso insieme di operazioni) su un valore approssimato ottenendo un valore più approssimato del precedente. Tale procedimento potrebbe essere schematizzato con il diagramma seguente dove il simbolo

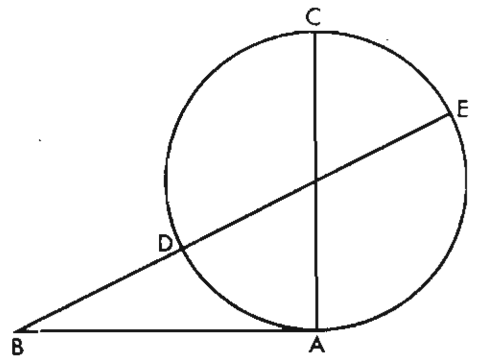


"f" scritto nel quadrato sta ad indicare l'insieme di operazioni (sempre le stesse) che, partendo da $x(n)$ (dove n è un intero naturale qualunque) conduce ad $x(n+1)$.
Nel caso in esame il simbolo "f" sta ad indicare le seguenti "istruzioni" che conducono ad $x(n+1)$ a partire da $x(n)$:

« Dato il valore $x(n)$ si calcoli $y(n)$, valore ottenuto aggiungendo 1 al valore trovato, e poi si prenda il reciproco; questo è il valore $x(n+1)$ »:

Ripetiamo ciò che abbiamo detto e cioè che non è necessario tradurre le informazioni del problema dato mediante i simboli dell'algebra: è possibile seguire anche altre strade, per esempio utilizzando una rappresentazione geometrica del problema e per le deduzioni le leggi della logica verbale classica, invece delle leggi che reggono i calcoli algebrici. Si ottiene così una soluzione del problema considerato che potrebbe essere chiamata "geometrica". Ciò si ha nel caso del problema che ci interessa (della iscrizione del decagono rego-

lare nella circonferenza) con la classica costruzione geometrica che risale ad Euclide.
Si prendano due segmenti AB ed AC uguali e perpendicolari tra loro; si tracci la circonferenza avente AC come diametro e quindi tangente in A al segmento AB.



Unito il centro della circonferenza con il punto B si dicano D ed E le intersezioni della congiungente tracciata con il centro della circonferenza, avendo indicato con D la intersezione che è più vicina a B. Se si assume il segmento AB come unità di misura delle lunghezze si ha che la misura del segmento BD è precisamente x, radice positiva della (1). Infatti, per un noto teorema relativo alle secanti di una circonferenza condotte per un punto, si ha

$$BA^2 = BD \cdot BE$$

e ricordando la scelta fatta della unità di misura (e ponendo $BD = x$) si ottiene

$$1 = x(1 + x)$$

che è esattamente l'equazione (1) scritta in forma diversa.
È chiaro che in questo caso non sono stati usati degli strumenti che appartengono alla "sintassi" dell'algebra, cioè alle regole formali che reggono i calcoli algebrici: infatti i teoremi geometrici che sono stati invocati sono dimostrati con i mezzi della logica abituale e le costruzioni geometriche eseguite sono state condotte a termine con gli strumenti elementari della geometria.

4. Abbiamo volutamente presentato dei problemi che non appartengono tutti al repertorio abituale che si trova sui libri di matematica.
Tuttavia il lettore attento avrà riconosciuto ogni volta, nella soluzione o nelle soluzioni che abbiamo presentato, le fasi di cui abbiamo parlato, ed avrà constatato la verità della nostra affermazione secondo la quale la distinzione (cioè l'operazione mentale con la quale si considerano le stesse cose sotto aspetti diversi) non sempre necessariamente porta con sè la separazione. Infatti si potrebbe dire che quasi sempre in tutti i momenti del procedimento di soluzione di un problema sono presenti elementi che si possono attribuire a tutte e tre le fasi che abbiamo considerato.

La varietà delle strade che abbiamo seguito per risolvere i problemi presentati induce anche a concludere che non si possono dare delle "regole sicure" per condurre a buon fine le varie fasi della soluzione di un problema; in particolare la scelta dei simboli, con i quali si debbono tradurre le informazioni del problema non è obbligata; essa può essere dettata dalla cultura, dall'esercizio e anche dalla previsione delle difficoltà delle fasi successive. Per quanto riguarda la seconda fase si può dire che essa può essere guidata dalla intuizione, dalla fantasia e soprattutto dall'esercizio. Infatti non si possono dare indicazioni sicure per prescrivere la direzione verso la quale debbono essere svolte le deduzioni, oppure per dire in che modo debbono essere sviluppati i calcoli, per giungere alla soluzione del problema. Analoghe osservazioni si possono fare a proposito della terza fase, cioè della interpretazione dei risultati e della discussione delle soluzioni ottenute con i calcoli eseguiti nella seconda fase.

Si possono dunque fare soltanto osservazioni generiche, le quali tuttavia risultano utili quasi sempre, non tanto per giungere al risultato, ma per garantire che i risultati eventualmente raggiunti siano validi.

Va anzitutto tenuto presente il fatto che la seconda fase, cioè quella della deduzione, molto spesso viene condotta in modo da ottenere delle relazioni che non sono equivalenti delle relazioni originali con le quali il problema è stato tradotto, ma soltanto delle conseguenze di queste. Si suol dire spesso che nello svolgimento dei calcoli "vengono introdotte delle soluzioni estranee". Per esempio ciò avverrebbe se, nel caso del problema V sopra considerato, si tenesse conto dell'equazione (1)' senza aggiungere anche la disequazione (2). Infatti l'equazione (1)' ammette due radici reali, una delle quali è negativa; si suol dire che questa "non ha significato per il nostro problema"; di fatto la (1)' è soltanto una conseguenza della relazione geometrica che lega il segmento cercato ai segmenti dati e alle altre informazioni implicite date dal problema o implicate necessariamente dai procedimenti che sono stati seguiti per tradurre questo con i simboli dell'algebra. Pertanto, se si trascura di rendere totalmente esplicite tutte le informazioni date dal problema, si può soltanto asserire che le soluzioni del problema vanno cercate tra le soluzioni delle relazioni algebriche che lo traducono (non completamente); ovvero, volendo dire la stessa cosa in altra forma, che le soluzioni del problema

sono necessariamente anche soluzioni del sistema di relazioni con le quali esso viene tradotto; ma che viceversa il fatto che per es. un numero o un insieme di numeri o di altri enti della matematica è soluzione del sistema di relazioni è solo condizione necessaria ma non sufficiente perché tali enti siano soluzioni anche del problema.
In secondo luogo, proprio perché non si possono dare delle regole generali e fisse per condurre a termine le fasi della soluzione di un problema, va dedicata un'attenzione particolare ai procedimenti che permettono di aumentare la probabilità che la soluzione giusta sia stata trovata, e di accrescere la certezza soggettiva che il successo sia stato ottenuto.
A questo proposito sono da raccomandarsi le verifiche di vario genere, che possono essere fatte dei procedimenti seguiti per risolvere il problema.
Per esempio, ritornando a considerare il problema V, quando si sia giunti alla espressione (3), sarà buona norma verificare che tale espressione soddisfa alla equazione (1)'. Oppure, quando si sia adottato il procedimento grafico che conduce alla successione di numeri razionali approssimati per difetto e per eccesso, è buona norma verificare che il valore razionale 55/89 che è stato scelto come valore approssimato della radice dell'equazione (1)' fa acquistare al primo membro dell'equazione stessa un valore molto prossimo a zero, e precisamente un valore negativo, di valore assoluto minore di $2 \cdot 10^{-4}$.
Sono inoltre da raccomandarsi i procedimenti di verifica; essi vanno dalle varie "prove" (come la "prova del 9", le "prove di parità" ed altre, nel caso di calcoli aritmetici) alla ricerca di procedimenti diversi tra loro per risolvere lo stesso problema.
Tali procedimenti di verifica possono anche consistere nella ricerca di "modelli" del sistema di relazioni formali, oppure nella applicazione di altri criteri generali di verifica. Nel caso della geometria, uno di questi criteri è quello di simmetria; esso potrebbe essere enunciato dicendo che la soluzione di un problema geometrico deve avere necessariamente tutte le simmetrie che sono possedute dai dati.

(segue da pag. 5)

dine dal disordine, la regolarità dall'apparente confusione. Ad onta delle apparenze contrarie, proprio la statistica insegna a diffidare del pressapochismo, a cercare di discernere il grano dal loglio, il significativo dal non significativo. La sperimentazione didattica corre il rischio di cercare il nuovo per il nuovo senza saper come verificare se le eventuali differenze riscontrate sono o non sono significative: questa è la sua debolezza. Bisogna quindi imparare a porre con chiarezza le *ipotesi:* se si pensa che due metodi differiscano realmente, bisogna riuscire a provare che le medie o varianze ottenute non son comprese nei margini d'oscillazione casuale più di un tanto (bisogna insomma tecnicamente rifiutare la ipotesi nulla H_0 per poter adottare quella alternativa H_a). Per questo, però, occorre impostare con chiarezza gli *schemi* o *progetti* di esperimenti, e raccogliere i *dati* in modo da render possibili e facili i calcoli.
Di ciò parleremo la prossima volta.

[1] Gli indicatori possono essere fatti osservabili di qualunque tipo; ma nella sperimentazione si preferisce considerare quegli indicatori che si possono considerare come *risposte* a *stimoli* appositamente introdotti; per es. l'insegnante usa come stimoli le interrogazioni o i compiti in classe. Volendo confrontare gli indicatori su due soggetti o su due gruppi, è importante che essi siano prelevati in condizioni costanti, ossia a parità di tutte le circostanze: esiti di interrogazioni diverse in circostanze diverse sono difficilmente confrontabili.

[2] Che due variabili siano associate vuol dire che variano in maniera concomitante, ossia che esiste una *funzione* che lega le variazioni dell'una a quelle dell'altra; i casi più semplici son quelli della eguaglianza, o della proporzionalità, che danno luogo a una relazione *lineare.*

[3] I gruppi si possono render omogenei in senso sperimentale scegliendo di valutare soltanto i soggetti che possono essere *appaiati* per i confronti. Il metodo *A* si manifesta migliore del metodo *B*, se ottiene risultati sistematicamente migliori su quei soggetti di un gruppo che possono esser considerati per tutto il resto *equivalenti* ai soggetti dell'altro gruppo, a prescindere dai soggetti non confrontabili.